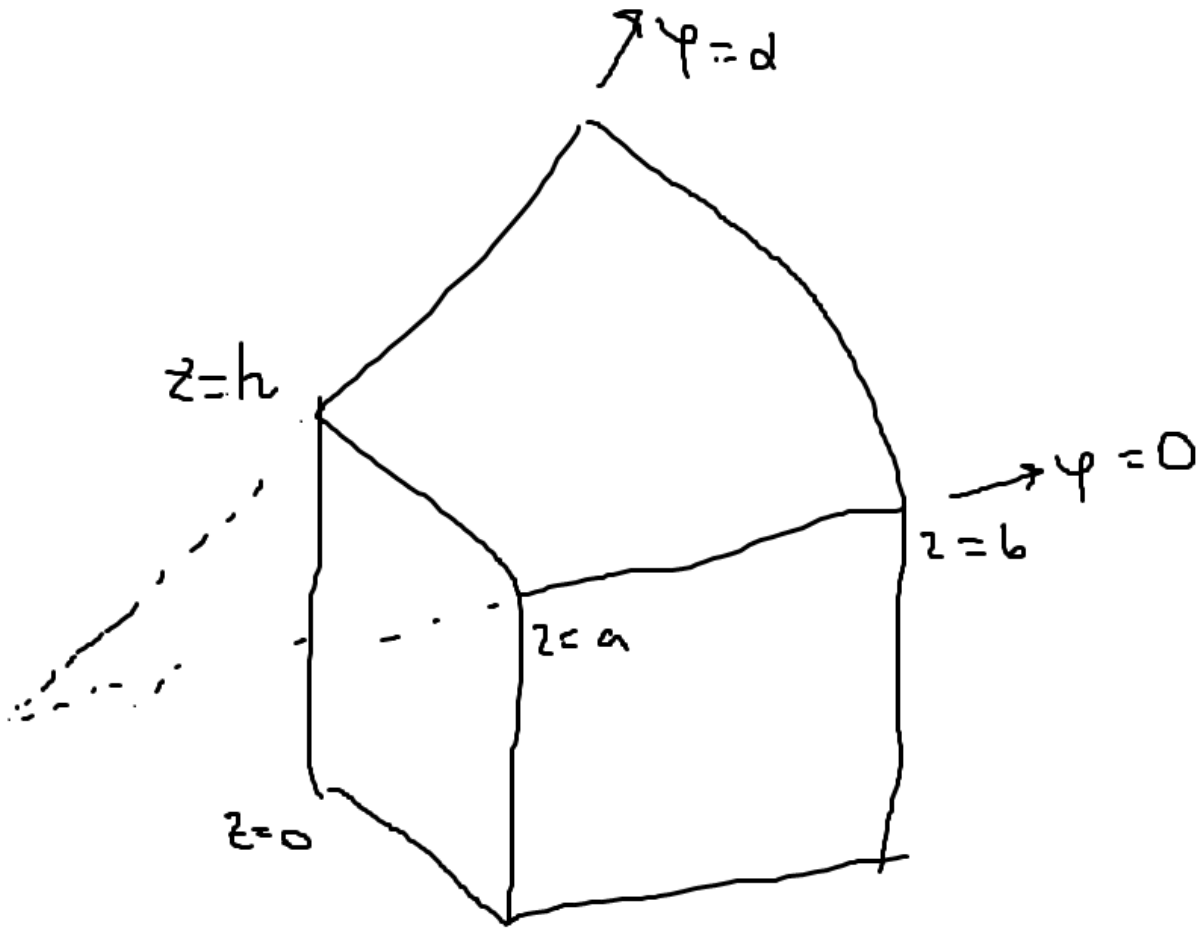
Решению задачи 3 в цилиндрической СК и вводу функций Инфельда и Макдональда посвящены 2 методички.
Одна (которую вы читаете сейчас) была мною написана 24 октября, в процессе изучения автором ММФ.
Следующая – уже после получения зачёта. Она написана более красивым и правильным языком, но мне очень не хочется удалять эту, потому что её писал человек, которому было ещё не всё очевидно и он тупил вместе с читателем, а следующую писал тот, которому всё очевидно (как очевидно всё Боголюбову). Поэтому прошу прощения за то, что буду повторяться и многие вещи будут и тут, и там.

Рассмотрим задачу 3 в цилиндрической системе координат.
Итак, у нас есть… в самом общем случае «кусок торта», причём отъеденный кем-то со стороны середины торта. Назовём эту фигуру «откусанный кусок торта».



В задаче 3 у нас уравнение Лапласа. Делим u на v(r,φ)Z(z), получим

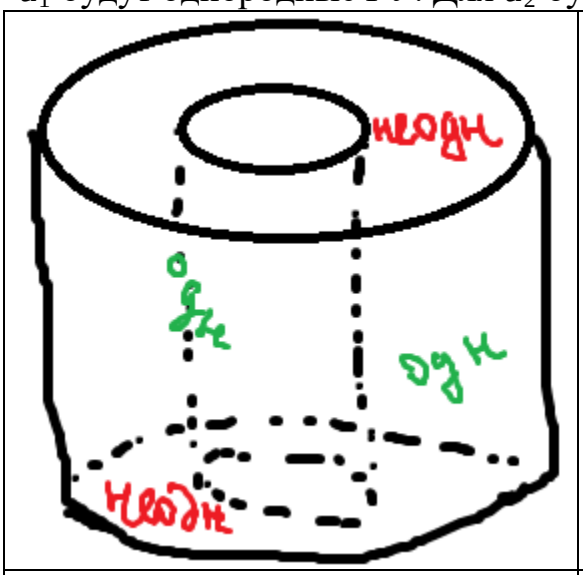
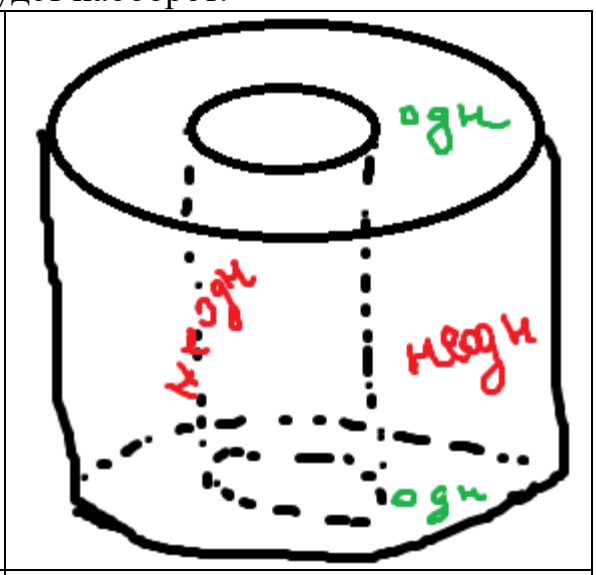
$$\Delta_{r\varphi}\, v(r,\varphi)\cdot Z(z) + v(r,\varphi)Z''(z) = 0.$$

$$\frac{\Delta_{r\varphi}\, v(r,\varphi)}{v(r,\varphi)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} = 0$$

А теперь давайте посмотрим на это уравнение. Обе части имеют похожий вид: мы действует оператором второй производной на функцию и делим на саму функцию. Получаем некую константу.
Причём в одном случае она будет отрицательной, в другой положительной, а сумма будет 0.

Как мы знаем, уравнение $\frac{Z''(z)}{Z(z)} = \text{const}$ имеет решение для ОДНОРОДНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ, только если const <0 (и =0 только в том случае, если оба граничных условия 2 рода). Если константа >0, то будет шинус и чосинус, которые с однородными граничными условиями.

Приблизительно та же беда для $\frac{\Delta_{r\varphi}\, v(r,\varphi)}{v(r,\varphi)} = \text{const}$. Если константа отрицательна – то ноу проблем, даже с однородными граничными условиями у нас будет нетривиальное решение – функции Бесселя и Неймана. Если константа положительна – ГУ должны быть неоднородны.
Если у нас на всех гранях откусанного куска торта ГУ однородны (т.е. задача 1), то решение будет только одно – тривиальное. Неинтересно. Но у нас на то и задача 3, что нас спасают неоднородные ГУ.
Если неоднородные ГУ будет сразу везде, мы не решим задачу. Разобьём u на сумму $u_1 + u_2$. Каждая из ушек будет удовлетворять уравнению Лапласа, но у u_1 будут неоднородные ГУ только на донцах цилиндра, а на боковой поверхности у u_1 будут однородные ГУ. Для u_2 будет наоборот.

	
u_1	u_2

Сразу скажу, что для u_1 у нас особых проблем не будет, а вот с u_2 будут, так что вынесем u_2 в следующую методичку, а в этой займёмся u_1.

Для v(r,φ) у нас однородные ГУ, и чтобы она не была тривиальным нулём, мы должны обеспечить, чтобы

$$\frac{\Delta_{r\varphi}\, v(r,\varphi)}{v(r,\varphi)}$$ было неположительной константой. Пусть это будет $-s^2$ ($s>=0$). А это мы уже решать умеем. $v(r, \varphi)=R(r)\Phi(\varphi)$. Для $\Phi(\varphi)$ у нас, если φ меняется от 0 до 2π, будет линейная комбинация косинуса и синуса (это если весь торт, а не кусок), или что-то одно, если φ меняется в меньших пределах (тогда пишем условие на целое или полуцелое число периодов, ну вы знаете). В любом случае мы находим $\Phi(\varphi)$ и обязательно отношение

$$\frac{\Phi^{II}(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = -\tilde{n}^2$$

которое должно оказаться квадратом некой величины $\tilde{n}$ (в предыдущих методичках это было ν_n). Если φ меняется от 0 до 2π, то $\Phi(\varphi)$ является линейной комбинацией $\cos n\varphi$ и $\sin(n\varphi)$, и $\tilde{n}$ будет равно n. В других же случаях $\tilde{n}$ будет отличаться от n. В дальнейших формулах будет фигурировать именно $\tilde{n}$!
Теперь дело за R(r):

$$R(r) = C_{\tilde{n}} J_{\tilde{n}}(sr) + D_{\tilde{n}} N_{\tilde{n}}(sr)$$

Далее надо посмотреть на граничные условия. Например, если a=0 (кусок торта не надкусан), то выкинуть функцию Неймана. Затем смотрим на второе условие на радиальное компоненту. Например, это ГУ Дирихле. Тогда надо найти нули функции Бесселя: $J_{\tilde{n}}(sb) = 0$. Пусть это будут s_k. Тогда R(r) будет

$$R_{\tilde{n}k}(r) = C_{\tilde{n}} J_{\tilde{n}}(s_{\tilde{n}k} r)$$

Ну а теперь настала очередь Z(z). $Z''(z)/Z(z)$ пришлось быть величиной положительной, а значит, будут шинусы и чосинусы. Решением Z(z) будет

$$A \operatorname{sh} sz + B \operatorname{sh} s(h-z)$$

Вид ФСР зависит от того, условия 1 рода или второго. Если на обеих донцах условия 1 рода, то пишем два шинуса. Если где-то второй род вместо первого – пишите чосинус.
Общий вид u_1 будет произведением всего этого добра – R(), Φ(), Z(). После чего надо будет из ГУ найти все константы.